

SOLUCIONES EXACTAS DE LAS ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN PARA MODELAR ONDAS GRAVITACIONALES TIPO EINSTEIN-ROSEN

Autor

Johan Andrés Colorado Caicedo

Proyecto de grado para optar al título
de Ingeniero Físico

Asesor

Dr. Gonzalo García Reyes

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE INGENIERÍAS
PROGRAMA DE INGENIERÍA FÍSICA

15 de junio de 2018

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

Resumen

Facultad de Ingenierías
Programa de Ingeniería Física

Autor: Johan Andrés Colorado Caicedo

Palabras clave: Ondas gravitacionales, métrica Einstein-Rosen, ecuaciones de campo de Einstein

El presente trabajo de grado tiene como propósito realizar una revisión teórica de las ondas gravitacionales tipo Einstein-Rosen. Inicialmente se partirá de la métrica de Weyl en coordenadas canónicas y mediante una transformación lineal se obtendrá el elemento de línea de Einstein-Rosen, luego se considerará dicha métrica para un caso idealizado donde no se estiman rotaciones en las perturbaciones del espacio-tiempo, es decir, con velocidad angular cero, esto tiene efecto directo en la métrica, dando como resultado una métrica diagonal y más sencilla de invertir. A continuación con este elemento de línea particularizado se calcularán los símbolos de Christoffel, para con estos encontrar el tensor de curvatura de Ricci, que es la conexión directa con la métrica, el cual da un esquema de la geometría del espacio-tiempo. En segunda instancia se pretende reproducir, por medio de los software MAPLE y Wolfram Mathematica el calculo anterior para la métrica de Einstein-Rosen generalizada (con rotaciones). Se construirá la densidad lagrangiana para la métrica de Einstein-Rosen, donde se podrá evidenciar las leyes de conservación y la evolución temporal de las perturbaciones gravitacionales de este tipo. Para determinar el lagrangiano del sistema, el método que se usará será por medio del escalar de curvatura. Seguidamente conseguir las ecuaciones de campo por medio de las ecuaciones de campo de Einstein y así demostrar que cumplen con un movimiento ondulatorio, también se validarán estos resultados por medio del principio de mínima acción. Finalmente el trabajo concluye con una aplicación de las ondas gravitacionales, donde se encontrarán las soluciones para las ondas monocromáticas, algunas propiedades físicas en una onda de Bonnor y Weber-Wheeler y así evaluar la fuerza necesaria para mantener una partícula en varias posiciones geoméricamente definidas sujetas a un pulso.

Agradecimientos

Quiero agradecer especialmente a aquellos profesores íntegros como pocos, que durante mi estancia en la UTP inculcaron en mí un anhelo para dedicar mi vida a la ciencia, contribuyeron con ese incansable de quien da lo mejor de sí mismo para verse reflejados en sus estudiantes. También quiero agradecerle a mi asesor y profesor Gonzalo García Reyes por confiar en mí para emprender ésta tarea, por estar al tanto de mis avances y por trabajar en equipo para culminar éste trabajo de grado con éxito ayudándome a su vez a afrontar el reto que represento el trabajo de grado en la etapa final de mi pregrado.

Physical Constants

$$\text{Speed of Light } c = 2,997\,924\,58 \times 10^8 \text{ ms}^{-\text{s}} \text{ (exact)}$$

Symbols

a	distance	m
P	power	W (Js^{-1})
ω	angular frequency	rads^{-1}

Índice

Resumen	I
Physical Constants	III
Symbols	IV
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	1
1.1.1. Justificación del problema	2
1.2. Objetivos	5
1.2.1. Objetivo General	5
1.3. Metodología	5
2. Marco de Referencia	7
2.1. Marco de Antecedentes	7
2.2. Marco Teórico	9
2.2.1. Relatividad General	9
2.2.1.1. Tensor métrico	9
2.2.1.2. Ecuación de la geodésica	9
2.2.1.3. Método lagrangiano para calcular la ecuación de la geodésica y símbolos de Christoffel	10
2.2.1.4. Tensor de curvatura	12
2.2.1.5. Tensor de Einstein	12
2.2.1.6. Tensor energía-momentum	13
2.2.1.7. Ecuaciones de Campo de Einstein	13
2.3. Teoría Clásica de Campos	14
2.3.1. Dinámica de Campos	14
2.3.1.1. Lagrangiano y acción	15
2.3.1.2. Principio de mínima acción	15
3. Deducción de las ecuaciones de campo	17
3.1. Métrica de Einstein-Rosen	17

3.1.1.	Elemento de línea de Einstein-Rosen	18
3.1.1.1.	Métrica de Einstein-Rosen (ER)	19
3.1.1.2.	Métrica de Einstein-Rosen generalizada (ERG)	20
3.2.	Ecuaciones de campo para ondas Einstein-Rosen	20
3.2.1.	Cálculo de los símbolos de Christoffel	20
3.2.2.	Cálculo del tensor de Ricci y escalar de curvatura	24
3.2.3.	Obtención de las ecuaciones de campo (ER)	26
3.3.	Deducción de la ecuaciones de campo por medio de Teoría de Campos . .	28
3.3.1.	Densidad lagrangiana del sistema	28
4.	Aplicaciones ondas gravitacionales Einstein-Rosen	31
4.1.	Aplicación: Solución para una onda monocromática	31
4.1.1.	Condición de integrabilidad	31
4.1.2.	Deducción de la función ψ	33
4.1.3.	Deducción de la función γ	39
4.1.4.	Verificación de γ	43
4.2.	Aplicación: Pulso formado por una superposición líneal de ondas	47
5.	Conclusiones	49
Bibliografía		51

A la memoria de mis queridos abuelos Raúl y Betty...

Capítulo 1

Introducción

1.1. Planteamiento del problema

Uno de los problemas fundamentales en relatividad general es el estudio de ondas gravitacionales. La existencia de las ondas gravitacionales en su forma linealizada ya era bien estudiada en los inicios de la relatividad general. No obstante no fue sino hasta 1937 cuando Albert Einstein y Nathan Rosen demostraron analíticamente que las ecuaciones de campo admiten soluciones tipo onda. Desde esa época el estudio de la radiación gravitacional se convirtió en un tema de gran interés en física teórica y experimental. Es de resaltar que el conocimiento que se tiene actualmente sobre las perturbaciones espaciotemporales es gracias a las investigaciones arduas del espacio-tiempo original de Einstein-Rosen [3]. El estudio de las ondas gravitacionales es un tema de interés en la actualidad y ha traído consigo el Premio Nobel de física 2017, por la detección de las mismas el 14 de septiembre de 2015, en el experimento de interferometría LIGO. Teniendo en cuenta este importante avance, es destacable conocer el sustento matemático que ayuda a comprender cómo el espacio-tiempo sufre perturbaciones producidas por objetos masivos acelerados.

La existencia de radiación gravitacional es una predicción natural de cualquier descripción relativista de la interacción gravitacional. Una onda monocromática, o un pulso, de

simetría cilíndrica, se mueve hacia adentro en el espacio libre de materia, implosiona en el eje y se mueve de nuevo, este es el único problema de la radiación gravitacional en el que se tiene una solución precisa de las ecuaciones de campo de la relatividad general [3]. El tratamiento matemático formal del problema converge en un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales con requisitos puramente geométricos (ecuaciones de campo de Einstein) [1], para poder abordar el problema de una forma adecuada, se debe asumir una métrica con condiciones particulares, propuesta originalmente para describir las ondas gravitacionales cilíndricas polarizadas linealmente. La métrica de Einstein-Rosen se amplió subsecuentemente al caso de dos ondas de polarización en espacio-tiempos cilíndricos y simétricos planos [2]. Encontrar la solución exacta de las ecuaciones de campo bajo unas condiciones que se hayan implícitas en las ondas de Einstein-Rosen ayuda a describir la interacción entre las ondas gravitacionales y la materia.

Gracias a la necesidad de comprender el origen de las ondas gravitacionales de una forma muy general y puramente matemática surge la siguiente pregunta.

“¿Cómo se pueden deducir las ecuaciones de campo para las ondas de Einstein-Rosen a partir de la densidad lagrangiana de una métrica con simetría cilíndrica?”.

1.1.1. Justificación del problema

La solución de las ecuaciones de campo de Einstein ha sido un asunto de gran importancia en la física teórica desde la formulación de la Relatividad General de Albert Einstein en el siglo XX. El marco de referencia de la Relatividad General redefinió la concepción física del universo a gran escala. De una hipótesis de "fuerzas a distancia" propuesta en la mecánica prerrelativista, se continuó a entender las interacciones gravitacionales como el resultado de la distribución de masa-energía que deforma el espacio-tiempo, como lo enuncia las famosas ecuaciones de campo de Einstein.

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab} \quad (1.1)$$

Esta expresión ha permitido explicar y modelar un gran número de fenómenos físicos a nivel de cosmología y astrofísica que han sido de gran ayuda para el conocimiento y comprensión de nuestro universo, pero aún hay problemas sin resolver o abiertos a investigación.

La ecuación (1.1) puede deducirse fácilmente a partir del principio de mínima acción, principio de acción estacionaria o principio de Hamilton asociado a la acción de Einstein-Hilbert [4]. Esta equivalencia escrita en el formalismo variacional es vista como un punto de partida fundamental [5], ya que la acción se escribe en términos de cantidades invariantes por medio del teorema de Noether. La importancia de este método es tal, que por medio de éste se han podido construir teorías que intentan generalizar la Relatividad General y solventar algunas falencias como lo son: la constante cosmológica, existencia de la materia oscura, gravedad acoplada a campos escalares, entre otras.

Como es de destacar, en física teórica es de vital importancia los principios a través de los cuáles se llega a una formulación particular de una teoría física. Así como en mecánica clásica, los cambios de coordenadas facilitan el tratamiento de los problemas según su geometría o restricciones; y las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana permiten comprender mejor diferentes aspectos. O en mecánica cuántica, la notación de Dirac permite desarrollar una construcción en términos de estados independientes del sistema físico de estudio, y el formalismo de Feynman construye la teoría en términos de amplitudes de probabilidad y establece una relación directa con la teoría clásica. Vemos entonces que formular problemas de Relatividad General de diferentes maneras puede aportar información hasta ahora desconocida al problema en cuestión.

Es en este punto donde se puede notar la importancia de la presente propuesta de trabajo de grado. Por medio de una métrica con simetría cilíndrica llamada la métrica de Einstein-Rosen, se logra la deducción de la acción de Einstein-Hilbert, a partir de la cual se definen las ecuaciones dinámicas de Einstein y estas a su vez pueden evidenciar las ecuaciones de campo para este modelo, que coinciden con las ecuaciones de campo para ondas gravitacionales.

Además de lo anterior, hacer equivalente el problema de la solución a las ecuaciones de campo de Einstein a un modelo de ondas gravitacionales, permite aplicar toda la maquinaria matemática ya bien estructurada en teoría de campos para afrontar el problema de formulación y solución de las ecuaciones de campo. Ya que tenemos un planteamiento de variación dinámica del campo gravitacional, se puede determinar esta por medio de una densidad lagrangiana, que es una función de las componentes del campo y sus primeras derivadas. Más precisamente las ecuaciones de variación dinámica se obtienen tomando, la integral de esta densidad lagrangiana sobre un dominio del espacio-tiempo. Así se puede construir el funcional de acción en forma integral y, subsiguientemente, mediante el uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen las ecuaciones en derivadas parciales que satisface el campo tanto en su variación en el espacio como en su evolución con el tiempo.

Lo expuesto hasta el momento muestra que el problema planteado es de un interés teórico importante. En el presente documento se plantea como propuesta de trabajo de grado hacer una revisión tipo monografía del modelado de ondas gravitacionales Einstein-Rosen, mostrando como estas satisfacen las ecuaciones de campo de Einstein y tienen solución exacta. Esta revisión servirá como punto de partida para calcular algunas propiedades físicas de las ondas gravitacionales de este tipo, también servirá para aquellos que pretendan utilizar este modelo para hallar efectos arrastre de ondas gravitacionales o posiblemente la relación de estas con la materia oscura.

Este tipo de trabajos de revisión permiten a los grupos de investigación trabajar y darle continuidad a ciertas líneas, además de permitir al estudiante comprender un tema de física teórica, hacer una revisión bibliográfica; cuestiones que hacen parte de la formación de un investigador. Además, ya que la Universidad Tecnológica de Pereira está en proceso de abrir el posgrado en Ciencias Físicas, estos trabajos podrán servir de base para las investigaciones que allí se adelanten.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Modelar matemáticamente ondas gravitacionales tipo Einstein-Rosen, encontrar una solución exacta y además general, mediante herramientas proporcionadas por la geometría diferencial aplicada a la relatividad general, más estrictamente un álgebra tensorial, para obtener el tensor de curvatura de Ricci y de esta manera propiciar la utilización del método lagrangiano de la teoría de campos para hallar las ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN.

- Encontrar el elemento de línea Einstein-Rosen a partir de la métrica de Weyl en coordenadas canónicas, por medio de una transformación lineal compleja.
- Calcular la densidad lagrangiana con la métrica de Einstein-Rosen, para ondas estacionarias no rotantes utilizando la geometría del modelo físico tratado.
- Deducir las ecuaciones de campo a partir de la densidad lagrangiana de las ondas tipo Einstein-Rosen.
- Calcular algunas soluciones particulares de las ecuaciones de campo para las ondas gravitacionales tipo Einstein-Rosen.
- Discutir algunas propiedades físicas de las ondas gravitacionales.

1.3. Metodología

La presente propuesta de trabajo de grado se clasifica dentro de la modalidad de Investigación básica en la cual se realiza un estudio tipo monografía sobre ondas gravitacionales, que se realizará de acuerdo a los objetivos planteados anteriormente de la siguiente manera:

Inicialmente se hará una revisión rigurosa sobre los aspectos más relevantes en relatividad general y del formalismo lagrangiano utilizado en teoría de campos, también se realizará un estudio sobre la construcción de los distintos tensores necesarios a partir de una métrica implícita, para de esta manera poder construir una densidad lagrangiana y así utilizar las herramientas matemáticas presentes en dicha teoría. Para esta parte se utilizarán como soporte distintos textos especializados en estos temas que están consignados en la bibliografía del presente documento.

A continuación se partirá de la métrica de Weyl en coordenadas canónicas y se hará una adaptación por medio de una transformación lineal de coordenadas, para así obtener el elemento de línea de Einstein-Rosen [1], el cual es una métrica del espacio-tiempo con simetría cilíndrica, se obtendrá la acción respectiva y lagrangiano asociado. Luego se aplicarán los métodos que propicia la Relatividad General por medio de la geometría del espacio-tiempo, es decir el escalar de curvatura, de esta manera obtener las ecuaciones de campo y determinar su similitud con la ecuación de ondas.

Posteriormente se le dará solución a las ecuaciones de campo obtenidas y se analizará físicamente los resultados obtenidos, para una mayor comprensión del tema.

Finalmente con los resultados mencionados anteriormente se estudiarán algunos fenómenos físicos de las ondas gravitacionales, de interés particular las ondas entrantes y salientes simétricas Bonnor [7] y Weber-Wheeler [3].

Capítulo 2

Marco de Referencia

2.1. Marco de Antecedentes

Las ecuaciones de campo de Einstein son un conjunto de diez ecuaciones diferenciales parciales no lineales en función de cuatro variables independientes, escritas en notación tensorial, las ecuaciones comparan la energía local y el momento dentro del espacio-tiempo con la curvatura de este [8]. Estas fueron publicadas por el físico alemán Albert Einstein en el año 1916 en su artículo “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie von”.

A partir del éxito de la teoría general de la relatividad surgieron un sinnúmero de aplicaciones para astrofísica y cosmología, teniendo como necesidad hallar soluciones para las ecuaciones de campo de acuerdo a los parámetros establecidos para cada fenómeno físico. Las dos primeras soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein fueron construidas en 1916 por Karl Schwarzschild poco después que la Relatividad General fuera propuesta [12]. La primera solución fue realizada para describir de una forma precisa la geometría del espacio-tiempo externo a un fluido perfecto esférico en equilibrio hidrostático. La otra solución correspondía a una aplicación para una geometría interna de un fluido esférico de densidad de energía constante u homogénea.

De una forma similar a la que utilizó Schwarzschild para elaborar soluciones a las ecuaciones de campo se han evidenciado otras soluciones de gran relevancia para la cosmología y la relatividad general. Las distintas técnicas para la construcción de soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein se fundamentan en obtener nuevas soluciones a partir de otras ya conocidas. Entre esas técnicas se encuentra la aplicación a las ondas gravitacionales, en 1918 esta aplicación fue estudiada por Albert Einstein en un principio [9], en su artículo por primera vez se calcula el efecto de las ondas gravitacionales, dando como resultado la famosa fórmula cuadripolar que describe la razón a la cual son emitidas las ondas gravitacionales de un sistema masivo.

Debido a la imposibilidad de detectar las ondas gravitacionales en las primeras décadas del siglo XX, por la debilidad extrema de las mismas y falta de tecnología para captarlas, se hacía controversial la existencia de estas. Curiosamente, el propio Einstein no estaba convencido, en 1936 se llegó a la conclusión junto con Nathan Rosen que las ondas gravitacionales no existían [10], pero comprobaron explícitamente que las ecuaciones de campo gravitacionales totalmente no lineales admiten de soluciones tipo onda. Posteriormente se pudo utilizar los distintos resultados de estudiar el espacio-tiempo original de Einstein-Rosen, para aplicar estos a problemas de la cosmología moderna, como por ejemplo el tratamiento de universos no homogéneos, llenos de ondas gravitacionales, campos clásicos y fluidos relativistas, choques gravitacionales de materia, entre otros [11].

En 1953 Scheidegger también discutió sobre la radiación gravitacional de los cuerpos en movimiento dentro de su propio campo y la subsecuente reacción de dicha radiación sobre su movimiento [13]. Con este fin, Rosen junto con Virbhadra investigaron si las ondas gravitacionales cilíndricas poseen o no energía y momento, utilizando los pseudotensores de energía-momento de Einstein, Landau y Lifshitz [14] y llevaron a cabo cálculos en coordenadas polares cilíndricas y descubrieron que los componentes de densidad de energía y momento desaparecen. Los resultados obtenidos por ellos encajan con la conjetura de Scheidegger de que un sistema físico no puede irradiar energía gravitatoria. En 1995 Virbhadra [16] demostró que los bien conocidos complejos energía-momento de Einstein, Tolman, Landau y Lifshitz [15].

Weber y Wheeler [3] muestran los efectos de arrastre lineales y rotacionales de las ondas gravitacionales estudiando un espacio-tiempo puramente al vacío, también desarrollaron un procedimiento general para estudiar las ondas gravitacionales débiles con simetría traslacional pero no axial que puede transportar momento angular.

2.2. Marco Teórico

2.2.1. Relatividad General

2.2.1.1. Tensor métrico

El elemento principal y más fundamental en torno a la Relatividad General, heredado de la geometría Riemanniana [17] es la métrica g_{ab} , un tensor de rango dos, que es utilizado para definir las distintas propiedades geométricas del espacio-tiempo. El desplazamiento infinitesimal para un espacio-tiempo arbitrario en coordenadas generalizadas está dado por 2.1.

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b. \quad (2.1)$$

La inversa de la métrica g_{ab} es g^{ab} . La métrica g^{ab} está dada por,

$$g_{ab}g^{ac} = \delta_b^c. \quad (2.2)$$

2.2.1.2. Ecuación de la geodésica

De manera análoga a la mecánica newtoniana, la Relatividad General también se puede estudiar a partir de la cinemática y la dinámica de los movimientos. La cinemática de los movimientos consiste en encontrar trayectorias por una partícula. Estas son denominadas *geodésicas* (línea de mínima longitud entre dos puntos del espacio-tiempo) [5] y se obtienen

al solicionar la ecuación geodésica, que es la siguiente

$$\frac{d^2 X^a}{ds^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dX^b}{ds} \frac{dX^c}{ds}, \quad (2.3)$$

donde X es la expresión paramétrica de los puntos de la curva parametrizada mediante un parámetro y Γ_{bc}^a son los símbolos de Christoffel asociados a la conexión (conecta la geometría local en torno a un punto a la de otro punto) sin torsión y estos se calculan de la siguiente manera,

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (g_{db,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d}). \quad (2.4)$$

La ecuación 2.4 corresponde a la ecuación de Euler-Lagrange del siguiente funcional

$$\int ds = \int dp \sqrt{g_{ab} \frac{dX^a}{dp} \frac{dX^b}{dp}}. \quad (2.5)$$

2.2.1.3. Método lagrangiano para calcular la ecuación de la geodésica y símbolos de Christoffel

Por medio de un método lagrangiano, se puede llegar a la ecuación de la geodésica, de esta manera también se pueden determinar los símbolos de Christoffel para una métrica dada, dando como resultado los símbolos no nulos, de una manera muy efectiva.

Se define el lagrangiano asociado a la métrica de la siguiente manera

$$L = g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b, \quad (2.6)$$

la ecuación de Eules-Lagrange para este lagrangiano será definido de la siguiente forma

$$\frac{\partial L}{\partial x^c} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c} \right) = 0, \quad (2.7)$$

donde λ es el tiempo propio.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial x^c} &= g_{ab,c} \dot{x}^a \dot{x}^b \\
 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c} &= g_{cb} \dot{x}^b + g_{ac} \dot{x}^a \\
 \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c} \right) &= g_{cb,a} \dot{x}^a \dot{x}^b + g_{cb} \ddot{x}^b + g_{ac,b} \dot{x}^a \dot{x}^b + g_{ac} \ddot{x}^a \\
 &= (g_{cb,a} + g_{ac,b}) \dot{x}^a \dot{x}^b + 2g_{cb} \ddot{x}^b
 \end{aligned}$$

Esto porque los índices mudos los podemos nombrar a libertad, además el tensor métrico es simétrico en sus índices, por esta razón se pueden sumar estos dos términos, ya que es el mismo término. La Ecuación de Euler-Lagrange queda entonces,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial x^c} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c} \right) &= (g_{cb,a} + g_{ac,b}) \dot{x}^a \dot{x}^b + 2g_{cb} \ddot{x}^b - g_{ab,c} \dot{x}^a \dot{x}^b \\
 &= (g_{cb,a} + g_{ac,b} - g_{ab,c}) \dot{x}^a \dot{x}^b + 2g_{cb} \ddot{x}^b = 0,
 \end{aligned}$$

ahora multiplicando a ambos lados por $\frac{1}{2}g^{dc}$ se obtiene

$$\ddot{x}^b + \frac{1}{2}g^{dc}(g_{cb,a} + g_{ac,b} - g_{ab,c})\dot{x}^a \dot{x}^b = 0, \tag{2.8}$$

donde se utilizó la identidad 2.2 (delta de Kronecker) y también por definición 2.4, entonces

$$\Gamma_{ba}^d = \frac{1}{2}g^{dc}(g_{cb,a} + g_{ac,b} - g_{ab,c}).$$

Finalmente tenemos.

$$\ddot{x}^b + \Gamma_{ba}^d \dot{x}^a \dot{x}^b = 0. \tag{2.9}$$

La anterior es la ecuación de la geodésica (se puede comparar con la ecuación 2.3). Esto prueba que el lagrangiano asociado a la métrica genera la ecuación de la geodésica, pero también obtenemos directamente los símbolos de Christoffel no nulos.

2.2.1.4. Tensor de curvatura

Ahora se tratará uno de los conceptos más importantes en Relatividad General, más propiamente este concepto pertenece a la **geometría Riemanniana** [18] el cual está descrito en una forma tensorial y es un método usado para expresar la curvatura de variedades Riemannianas. El tensor de curvatura de Riemann es definido como:

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a. \quad (2.10)$$

Se puede utilizar el tensor de curvatura para definir el **Tensor de Ricci** al hacer la contracción siguiente

$$R_{ab} = R_{acb}^c = g^{cd} R_{dacb}, \quad (2.11)$$

a su vez la contracción del tensor de Ricci define el **escalar de curvatura** o **escalar de Ricci**.

$$R = g^{ab} R_{ab}. \quad (2.12)$$

2.2.1.5. Tensor de Einstein

El tensor y el escalar de curvatura mostrados en 2.11 y 2.12 definen el tensor de Einstein de la siguiente manera

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R, \quad (2.13)$$

este tensor tiene la siguiente propiedad

$$\nabla^b G_{ab} = G_{ab;b} = 0. \quad (2.14)$$

2.2.1.6. Tensor energía-momentum

El tensor de energía-momentum contiene toda la información sobre la densidad de energía total de un sistema, medida por un observador inercial. Denotado por T^{ab} ,

$$T^{ab} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix},$$

donde p es la presión y ρ es la densidad de energía. También se puede decir que el tensor de energía-momentum es un tensor simétrico y para un espacio-tiempo plano cumple la siguiente propiedad

$$\partial_b T^{ab} = 0. \quad (2.15)$$

Además si se usa una métrica no plana, la ley de la energía se puede expresar de la siguiente forma

$$\nabla_b T^{ab} = 0. \quad (2.16)$$

2.2.1.7. Ecuaciones de Campo de Einstein

El tratamiento dinámico de los distintos fenómenos físicos en Relatividad General se basan en el supuesto que una distribución o concentración de materia-energía deforma la geometría del espacio-tiempo; en otras palabras modifica la métrica. Como ya se vió, la expresión que modela esta dependencia es la ecuación de Einstein 1.1, EFE (por sus siglas en inglés). Las EFE nos dice que la métrica es correspondiente a la geometría y la geometría es el efecto de una cantidad de materia que se expresa en un tensor de momento-energía. Las distribuciones de materias causan la curvatura del espacio-tiempo.

Utilizaremos el formalismo riemanniano para conectar materia y métrica. La divergencia covariante del tensor de Einstein G_{ab} desaparece en la ecuación 2.14 además se pueden escribir en unidades geometrizadas ($G=c=1$) las ecuaciones de campo de la siguiente manera

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi T_{ab}. \quad (2.17)$$

La ecuación 2.17 puede escribirse como las ecuaciones de Euler-Lagrange del funcional

$$S = \int (\sqrt{-g}R + \mathcal{L}')d^4x, \quad (2.18)$$

donde el primer término es el lagrangiano de Einstein-Hilbert [19], g es el determinante de la métrica y \mathcal{L}' es el lagrangiano correspondiente a campos de materia o electromagnéticos.

Dado que las ecuaciones de campo son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales para los diez campos que definen la métrica [5]. En general es imposible hallar todas las soluciones, se buscan soluciones particulares que satisfacen ciertas condiciones de simetría.

2.3. Teoría Clásica de Campos

La teoría clásica de campos es un formalismo lagrangiano, en este la dinámica de un sistema se describe por medio de una sola función escalar, el lagrangiano. Utilizando un principio de variacional, el lagrangiano produce las ecuaciones de movimiento que rigen la evolución temporal de dicho sistema [14].

2.3.1. Dinámica de Campos

Un **campo** es una cantidad definida para cada punto del espacio-tiempo. Mientras que la mecánica clásica de partículas maneja un número finito de coordenadas generalizadas

$q_a(t)$, en teoría de campos lo primordial es la dinámica de los campos

$$\phi_a(x_b), \quad (2.19)$$

donde ϕ_a son un conjunto de campos que son funciones de las variables x_b , y de las primeras derivadas de los campos.

2.3.1.1. Lagrangiano y acción

La dinámica de los campos está gobernada por la acción S de la siguiente forma

$$S = \int \mathcal{L}(x^b, \phi^a(x^b), \phi_{,b}^a(x^b)) d^n x, \quad (2.20)$$

donde estrictamente \mathcal{L} es la *densidad lagrangiana* y no es única. La transformación $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \Gamma_{,a}^a$ deja invariante la acción 2.20. El problema variacional de hallar los valores estacionarios de la acción S sujeta a condiciones de contorno fijas, es decir, las funciones que satisfacen $\delta S = 0$, corresponde a solucionar las ecuaciones de Euler-Lagrange 2.21

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^a} = \frac{\partial}{\partial x^b} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,b}^a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} = 0. \quad (2.21)$$

2.3.1.2. Principio de mínima acción

La dinámica de comportamiento de los campos puede determinarse por medio del *principio de mínima acción*. Este principio establece que cuando un sistema evoluciona de una configuración dada a otra entre un tiempo t_1 y t_2 , esto a lo largo de un “camino” en el

espacio de configuración para el cual la acción es mínima y por lo tanto satisface $\delta S = 0$. Esta condición se puede reescribir como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_b \phi_a), \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b \phi_a)} \delta (\partial_b \phi_a)}_I \right\} = 0.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Ahora integrando por partes a I se obtiene

$$\begin{aligned}I &= \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b \phi_a)} \delta (\partial_b \phi_a), \\ &= \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b \phi_a)} \partial_b \delta \phi_a,\end{aligned}$$

utilizando $uv - \int v du$, donde $u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b \phi_a)}$, entonces $du = \partial_b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b \phi_a)} \right)$, también $dv = (\partial_b \delta \phi_a) d^4x = d(\delta \phi_a) \Rightarrow v = \delta \phi_a$.

Entonces la integral I quedaría de la siguiente manera

$$I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b \phi_a)} \delta \phi_a \Big|_{t_1, x}^{t_2, x} - \int d^4x \partial_b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b \phi_a)} \right) \delta \phi_a,$$

el primer término se anula, porque es una derivada total. Ahora sustituyendo I en la ecuación 2.23 se tiene

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b \phi_a)} \right) \right\} \delta \phi_a = 0.\tag{2.23}$$

Se ha obtenido la ecuación de Euler-Lagrange para un campo ϕ_a por medio del principio de Hamilton

$$\partial_b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b \phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0.\tag{2.24}$$

Capítulo 3

Deducción de las ecuaciones de campo

3.1. Métrica de Einstein-Rosen

Para el estudio de ondas gravitacionales inicialmente se debe establecer el tipo de métrica con el cual se va a trabajar, en este caso se manejará una métrica de simetría cilíndrica y se puede llegar a ella por medio de una transformación de la métrica Weyl en coordenadas canónicas [1]. El espacio-tiempo original de Einstein-Rosen pertenece a una amplia familia de espacio-tiempos en los cuales la métrica depende de la coordenada temporal y las coordenadas espaciales. Estos espacio-tiempos son comúnmente referidos como la generalización de los espacio-tiempos de Einstein-Rosen y son descritos por el elemento de línea [11].

Se obtendrá el elemento de línea de Einstein-Rosen a partir del elemento de línea de Weyl en coordenadas canónicas como se muestra a continuación.

3.1.1. Elemento de línea de Einstein-Rosen

El elemento de línea para la métrica estacionaria axialmente simétrica en coordenadas de Weyl (t, ρ, z, ϕ) en la forma de Lewis-Papapetrou es

$$ds^2 = -e^{-2U} [e^{2K} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] + e^{2U} (dt + Ad\phi)^2, \quad (3.1)$$

U, K y A son campos que sólo dependen de las coordenadas (ρ, z) . Este elemento de línea es sacado de Kramer (2003)

Se propone la siguiente transformación

$$t \rightarrow iz \qquad z \rightarrow it \qquad A \rightarrow iA, \quad (3.2)$$

entonces,

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{-2U} (idz + iAd\phi)^2 - e^{2U} (e^{2K} (d\rho^2 - dt^2) + \rho^2 d\phi^2), \\ &= e^{2U} (-dz^2 - 2Adzd\phi - A^2 d\phi^2) - e^{2(K-U)} d\rho^2 + e^{2(K-U)} dt^2 - e^{-2U} \rho^2 d\phi^2. \end{aligned}$$

Se llega al elemento de línea de Einstein-Rosen generalizado (ERG)

$$ds^2 = e^{2(K-U)} dt^2 - e^{-2U} (e^{2K} d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2) - e^{2U} (dz + Ad\phi)^2. \quad (3.3)$$

Para el caso de este documento el elemento de línea será y lo seguiremos llamando "elemento de línea de Einstein-Rosen generalizado"

$$ds^2 = e^{2(\gamma-\psi)} dt^2 - e^{-2\psi} (e^{2\gamma} d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2) - e^{2\psi} (dz + \omega d\phi)^2, \quad (3.4)$$

donde ψ, γ y ω son funciones que dependen solamente de (ρ, t) . En este caso, el problema de solucionar las ecuaciones de Einstein 1.1, se resumen en hallar los campos ψ, γ y ω .

El elemento de línea Einstein-Rosen particularizado o simplemente Einstein-Rosen, es decir con la función $\omega = 0$, será

$$ds^2 = e^{2(\gamma-\psi)} dt^2 - e^{-2\psi} (e^{2\gamma} d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2) - e^{2\psi} dz^2. \quad (3.5)$$

De acuerdo con 2.1, y teniendo los elementos de línea de Einstein-Rosen y Einstein-Rosen generalizado, se pueden expresar en forma matricial las métricas respectivamente de la siguiente manera.

3.1.1.1. Métrica de Einstein-Rosen (ER)

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} e^{2(\gamma-\psi)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2(\gamma-\psi)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 e^{-2\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{2\psi} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la inversa de la métrica es directa y queda así.

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} e^{2(-\gamma+\psi)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2(-\gamma+\psi)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{e^{2\psi}}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2\psi} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Determinante de la métrica de Einstein-Rosen

Como la métrica es diagonal, el determinante g es trivialmente el producto de su diagonal.

$$g = -\rho^2 (e^{2(\gamma-\psi)})^2 \quad (3.7)$$

3.1.1.2. Métrica de Einstein-Rosen generalizada (ERG)

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} e^{2(\gamma-\psi)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2(\gamma-\psi)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\rho^2 e^{-2\psi} + \omega^2 e^{2\psi}) & -\omega e^{2\psi} \\ 0 & 0 & -\omega e^{2\psi} & -e^{2\psi} \end{pmatrix}$$

3.2. Ecuaciones de campo para ondas Einstein-Rosen

En esta sección se hará la deducción de las ecuaciones de campo con $\omega = 0$ a través del método que se muestra en el capítulo 2, por medio de las herramientas que brinda la relatividad general, geometría diferencial y el álgebra tensorial. Este proceso se llevará a cabo, inicialmente calculando los símbolos de Christoffel, para con estos encontrar el Tensor y el escalar de Ricci.

3.2.1. Cálculo de los símbolos de Christoffel

Se pueden calcular de varias maneras los símbolos de Christoffel, una de ellas es como se vió en el capítulo anterior en la ecuación 2.4, pero para efectos de este trabajo el procedimiento que se utilizará es el método lagrangiano explicado en la sección 2.2.1.3.

Siguiendo el mismo procedimiento, entonces planteando el lagrangiano para la métrica

$$L = e^{2(\gamma-\psi)} \dot{t}^2 - e^{2(\gamma-\psi)} \dot{\rho}^2 - \rho^2 e^{-2\psi} \dot{\phi}^2 - e^{2\psi} \dot{z}^2, \quad (3.8)$$

la ecuación de Euler-Lagrange para este lagrangiano es

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0,$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} &= [2(\gamma_{,t} - \psi_{,t})e^{2(\gamma-\psi)}] \dot{t}^2 - [2(\gamma_{,t} - \psi_{,t})e^{2(\gamma-\psi)}] \dot{\rho}^2 + \\ &+ [2\psi_{,t}\rho^2 e^{-2\psi} \dot{\phi}^2 - 2\psi_{,t}e^{2\psi}] \dot{z}^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = 2e^{2(\gamma-\psi)} \dot{t}, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) &= 2 [e^{2(\gamma-\psi)} \ddot{t} + 2(\gamma_{,t} - \psi_{,t})e^{2(\gamma-\psi)} \dot{t}\dot{t} + 2(\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho})e^{2(\gamma-\psi)} \dot{t}\dot{\rho}], \\ &= 2[\ddot{t} + 2(\gamma_{,t} - \psi_{,t})\dot{t}^2 + 2(\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho})e^{2(\gamma-\psi)} \dot{t}\dot{\rho}] e^{2(\gamma-\psi)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La Ecuación de Euler-Lagrange para este caso quedaría

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

$$\begin{aligned} 2e^{2(\gamma-\psi)} \ddot{t} + 4(\gamma_{,t} - \psi_{,t})e^{2(\gamma-\psi)} \dot{t}^2 + 4(\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho})e^{2(\gamma-\psi)} \dot{t}\dot{\rho} - 2(\gamma_{,t} - \psi_{,t})e^{2(\gamma-\psi)} \dot{t}^2 + \\ + 2(\gamma_{,t} - \psi_{,t})e^{2(\gamma-\psi)} \dot{\rho}^2 - 2\psi_{,t}\rho^2 e^{-2\psi} \dot{\phi}^2 + 2\psi_{,t}e^{2\psi} \dot{z}^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{t} + \frac{4(\gamma_{,t} - \psi_{,t})e^{2(\gamma-\psi)}}{2e^{2(\gamma-\psi)}} \dot{t}^2 - \frac{2(\gamma_{,t} - \psi_{,t})e^{2(\gamma-\psi)}}{2e^{2(\gamma-\psi)}} \dot{t}^2 + \frac{4(\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho})e^{2(\gamma-\psi)}}{2e^{2(\gamma-\psi)}} \dot{t}\dot{\rho} \\ + \frac{2(\gamma_{,t} - \psi_{,t})e^{2(\gamma-\psi)}}{2e^{2(\gamma-\psi)}} \dot{\rho}^2 + \frac{2\psi_{,t}\rho^2 e^{-2\psi}}{2e^{2(\gamma-\psi)}} \dot{\phi}^2 + \frac{2\psi_{,t}e^{2\psi}}{2e^{2(\gamma-\psi)}} \dot{z}^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Se obtiene de esta manera la primer ecuación de la geodésica para la métrica de Einstein-Rosen

$$\ddot{t} + (\gamma_{,t} - \psi_{,t})\dot{t}^2 + (\gamma_{,t} - \psi_{,t})\dot{\rho}^2 - (\rho^2 \psi_{,t}^2 e^{-2\gamma}) \dot{\phi}^2 + (\psi_{,t} e^{2(2\psi-\gamma)}) \dot{z}^2 + 2(\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho}) \dot{t}\dot{\rho} = 0. \quad (3.13)$$

Comparando la expresión anterior con la ecuación 2.9, se pueden extraer directamente los primeros símbolos de Christoffel de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tt}^t &= \gamma_{,t} - \psi_{,t}, \\
\Gamma_{\rho\rho}^t &= \gamma_{,t} - \psi_{,t}, \\
\Gamma_{\phi\phi}^t &= -\rho^2 \psi_{,t} e^{-2\gamma}, \\
\Gamma_{zz}^t &= \psi_{,t} e^{2(2\psi-\gamma)} \\
\Gamma_{t\rho}^t = \Gamma_{\rho t}^t &= \gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Ahora derivando el lagrangiano con respecto a ρ y $\dot{\rho}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \rho} &= 2[\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho}]e^{2(\gamma-\psi)}\dot{t}^2 - 2[\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho}]e^{2(\gamma-\psi)}\dot{\rho}^2 + \\
&\quad - 2[\rho - \rho^2 \psi_{,\rho}]e^{-2\psi}\dot{\phi}^2 - 2\psi_{,\rho}e^{2\psi}\dot{z}^2,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = -2e^{2(\gamma-\psi)}, \tag{3.16}$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) = -2e^{2(\gamma-\psi)}\ddot{\rho} - 4(\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho})e^{2(\gamma-\psi)}\dot{t}\dot{\rho}. \tag{3.17}$$

La Ecuación de Euler-Lagrange para este caso quedaría

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0, \\
&-2e^{2(\gamma-\psi)} - 4(\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho})e^{2(\gamma-\psi)}\dot{t}\dot{\rho} - 2[\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho}]e^{2(\gamma-\psi)}\dot{t}^2 + \\
&+ [\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho}]e^{2(\gamma-\psi)}\dot{\rho}^2 + 2[\rho - \rho^2 \psi_{,\rho}]e^{-2\psi}\dot{\phi}^2 + 2\psi_{,\rho}e^{2\psi}\dot{z}^2 = 0, \\
&\ddot{\rho} + \frac{4(\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho})e^{2(\gamma-\psi)}}{2e^{2(\gamma-\psi)}}\dot{t}\dot{\rho} + \frac{2(\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho})e^{2(\gamma-\psi)}}{2e^{2(\gamma-\psi)}}\dot{t}^2 - \frac{2(\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho})e^{2(\gamma-\psi)}}{2e^{2(\gamma-\psi)}}\dot{\rho}^2 + \\
&\quad - \frac{2(\rho - \rho^2 \psi_{,\rho})e^{-2\psi}}{2e^{2(\gamma-\psi)}}\dot{\phi}^2 - \frac{2\psi_{,\rho}e^{2\psi}}{e^{2(\gamma-\psi)}}\dot{z}^2 = 0,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

simplificando se obtiene entonces la segunda ecuación de la geodésica

$$\ddot{\rho} + 2(\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho})\dot{t}\dot{\rho} + (\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho})\dot{t}^2 - (\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho})\dot{\rho}^2 + (\rho\psi_{,\rho} - 1)\rho e^{-2\psi}\dot{\phi}^2 - \psi_{,\rho}e^{2(2\psi-\gamma)}\dot{z}^2 = 0, \quad (3.19)$$

los símbolos de Christoffel no nulos son los siguientes.

$$\begin{aligned} \Gamma_{t\rho}^\rho = \Gamma_{\rho t}^\rho &= \gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho}, \\ \Gamma_{tt}^\rho &= \gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho}, \\ \Gamma_{\rho\rho}^\rho &= \gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^\rho &= (\rho\psi_{,\rho} - 1)\rho e^{-2\gamma}, \\ \Gamma_{zz}^\rho &= -\psi_{,\rho}e^{2(2\psi-\gamma)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para el caso de la coordenada ϕ , se obtiene la tercer ecuación geodésica

$$\ddot{\phi} - 2\psi_{,\rho}\dot{t}\dot{\phi} - 2\left(\frac{\rho\psi_{,\rho} - 1}{\rho}\right)\dot{\rho}\dot{\phi} = 0, \quad (3.21)$$

por lo tanto, los símbolos de Christoffel no nulos para la tercer coordenada son,

$$\begin{aligned} \Gamma_{t\phi}^\phi = \Gamma_{\phi t}^\phi &= -\psi_{,\rho}, \\ \Gamma_{\rho\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\rho}^\phi &= \frac{\rho\psi_{,\rho} - 1}{\rho}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

De forma análoga se obtiene la cuarta ecuación geodésica.

$$\ddot{\phi} + 2\psi_{,t}\dot{t}\dot{z} + \psi_{,\rho}\dot{\rho}\dot{z} = 0. \quad (3.23)$$

Símbolos no nulos

$$\begin{aligned} \Gamma_{tz}^z = \Gamma_{zt}^z &= \psi_{,t}, \\ \Gamma_{\rho z}^z = \Gamma_{z\rho}^z &= \psi_{,\rho}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.2.2. Cálculo del tensor de Ricci y escalar de curvatura

Teniendo los símbolos de Christoffel para la correspondiente métrica, se procede a calcular el tensor de curvatura de Ricci por medio de la ecuación 2.10, y contrayendo dos índices se obtiene el tensor de Ricci 2.11

$$R_{ab} = \Gamma_{ac,b}^c - \Gamma_{ab,c}^c + \Gamma_{ac}^d \Gamma_{bd}^c - \Gamma_{ab}^d \Gamma_{cd}^c. \quad (3.25)$$

Para hallar las componentes del tensor Ricci se expande la ecuación anterior, por practicidad se utilizan números del 0 al 3 para las coordenadas $(t, \rho, \phi, z) \rightarrow (0, 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned} R_{00} = & \Gamma_{00,0}^0 - \Gamma_{00,0}^0 + \Gamma_{00}^d \Gamma_{d0}^0 - \Gamma_{00}^d \Gamma_{d0}^0 + \\ & + \Gamma_{01,0}^1 - \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{01}^d \Gamma_{d0}^1 - \Gamma_{00}^d \Gamma_{d1}^1 + \\ & + \Gamma_{02,0}^2 - \Gamma_{00,2}^2 + \Gamma_{02}^d \Gamma_{d0}^2 - \Gamma_{00}^d \Gamma_{d2}^2 + \\ & + \Gamma_{03,0}^3 - \Gamma_{00,3}^3 + \Gamma_{03}^d \Gamma_{d0}^3 - \Gamma_{00}^d \Gamma_{d3}^3 \quad , \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} R_{11} = & \Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{11,0}^0 + \Gamma_{10}^d \Gamma_{d1}^0 - \Gamma_{11}^d \Gamma_{d0}^0 + \\ & + \Gamma_{11,1}^1 - \Gamma_{11,1}^1 + \Gamma_{11}^d \Gamma_{d1}^1 - \Gamma_{11}^d \Gamma_{d1}^1 + \\ & + \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{11,2}^2 + \Gamma_{12}^d \Gamma_{d1}^2 - \Gamma_{11}^d \Gamma_{d2}^2 + \\ & + \Gamma_{13,1}^3 - \Gamma_{11,3}^3 + \Gamma_{13}^d \Gamma_{d1}^3 - \Gamma_{11}^d \Gamma_{d3}^3 \quad . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Se continua igual para cada una de las combinaciones posibles, se cancelan los términos que se repiten, los símbolos que son cero y por último se reemplazan los no nulos. Las

componentes del tensor de Ricci son las siguientes

$$\begin{aligned}
R_{00} = R_{tt} &= -2(\psi, t)^2 + \psi_{,\rho\rho} - \gamma_{,tt} + \gamma_{,\rho\rho} - \psi_{,\rho\rho} - \frac{1}{\rho}\psi_{,\rho} + \frac{1}{\rho}\gamma_{,\rho}, \\
R_{01} = R_{10} = R_{t\rho} = R_{\rho t} &= -2\psi_{,t}\psi_{,\rho} + \frac{1}{\rho}\gamma_{,t}, \\
R_{11} = R_{\rho\rho} &= -2(\psi_{,\rho})^2 - \psi_{,tt} + \gamma_{,tt} - \gamma_{,\rho\rho} + \psi_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\psi_{,\rho} + \frac{1}{\rho}\gamma_{,\rho}, \\
R_{22} = R_{\phi\phi} &= \rho e^{-2\gamma} (-\rho\psi_{,tt} + \rho\psi_{,\rho\rho} + \psi_{,\rho}), \\
R_{33} = R_{zz} &= -e^{2(2\psi-\gamma)} \left(-\psi_{,tt} + \psi_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\psi_{,\rho} \right), \tag{3.28}
\end{aligned}$$

las demás componentes mixtas como $R_{\rho\phi}, R_{tz}, \dots$ son idénticamente cero, esto por la dependencia de ρ y t de los campos.

Para encontrar el escalar de curvatura, se contraen los índices del tensor de Ricci, teniendo en cuenta que se necesitan las componentes de la métrica inversa que se muestra en 3.6, reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned}
R = R_a^a = g^{ab} R_{ab} &= g^{00} R_{00} + g^{01} R_{01} + g^{10} R_{10} + g^{11} R_{11} + \\
&\quad + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}, \\
&= e^{2(\psi-\gamma)} R_{00} + 0 + 0 - e^{2(\psi-\gamma)} R_{11} + \\
&\quad - \frac{e^{2\psi}}{\rho^2} R_{22} - e^{-2\psi} R_{33}, \\
&= e^{2(\psi-\gamma)} [R_{00} - R_{11}] + e^{2\psi} \left[-\frac{R_{22}}{\rho^2} - e^{-4\psi} R_{33} \right], \\
&= e^{2(\psi-\gamma)} [R_{00} - R_{11}] + e^{2\psi} \left[e^{-2\gamma} \left(\psi_{,tt} - \psi_{,\rho\rho} - \frac{\psi_{,\rho}}{\rho} \right) + \right. \\
&\quad \left. e^{-2\gamma} \left(-\psi_{,tt} + \psi_{,\rho\rho} + \frac{\psi_{,\rho}}{\rho} \right) \right], \\
&= e^{2(\psi-\gamma)} [R_{00} - R_{11}], \\
R &= 2e^{2(\psi-\gamma)} \left[(\psi_{,\rho})^2 - (\psi_{,t})^2 + \psi_{,tt} - \gamma_{,tt} + \gamma_{,\rho\rho} - \psi_{,\rho\rho} - \frac{\psi_{,\rho}}{\rho} \right]. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

3.2.3. Obtención de las ecuaciones de campo (ER)

En esta parte se van a deducir las ecuaciones de campo para la métrica de Einstein-Rosen, por medio del proceso 1.1, pero para éste caso (en el vacío, en ausencia de cargas)

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 0. \quad (3.30)$$

Reemplazando el tensor de Ricci, la métrica y el escalar de curvatura hallado se obtiene la ecuación de campo para la componente (00) así

$$\begin{aligned} G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R &= 0, \\ &= -2(\psi_{,t})^2 + \psi_{,tt} - \gamma_{,tt} + \gamma_{,\rho\rho} - \psi_{,\rho\rho} - \frac{\psi_{,\rho}}{\rho} + \frac{\gamma_{,\rho}}{\rho} + \\ &\quad - \frac{1}{2}(e^{2(\gamma-\psi)}) \left[-(\psi_{,t})^2 + (\psi_{,\rho})^2 + \psi_{,tt} - \gamma_{,tt} + \gamma_{,\rho\rho} + \right. \\ &\quad \left. - \psi_{,\rho\rho} - \frac{\psi_{,\rho}}{\rho}(2e^{2(\psi-\gamma)}) \right] = 0, \\ &= -(\psi_{,t})^2 - (\psi_{,\rho})^2 + \frac{\gamma_{,\rho}}{\rho} = 0, \\ \gamma_{,\rho} &= \rho \left[(\psi_{,\rho})^2 + (\psi_{,t})^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ecuación de campo para el elemento (11) es de la siguiente manera

$$\begin{aligned} G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R &= 0, \\ &= -2(\psi_{,\rho})^2 - \psi_{,tt} + \gamma_{,tt} - \gamma_{,\rho\rho} + \psi_{,\rho\rho} + \frac{\psi_{,\rho}}{\rho} + \frac{\gamma_{,\rho}}{\rho} + \\ &\quad - \frac{1}{2}(-e^{2(\gamma-\psi)}) \left[-(\psi_{,t})^2 + (\psi_{,\rho})^2 + \psi_{,tt} - \gamma_{,tt} + \gamma_{,\rho\rho} + \right. \\ &\quad \left. - \psi_{,\rho\rho} - \frac{\psi_{,\rho}}{\rho}(2e^{2(\psi-\gamma)}) \right] = 0, \\ &= -(\psi_{,t})^2 - (\psi_{,\rho})^2 + \frac{\gamma_{,\rho}}{\rho} = 0, \\ \gamma_{,\rho} &= \rho \left[(\psi_{,\rho})^2 + (\psi_{,t})^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ecuación de campo para la componente (22) es

$$\begin{aligned}
 G_{22} = R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}R &= 0, \\
 &= -e^{-2\gamma}(-\psi_{,tt}\rho^2 + \psi_{,\rho\rho}\rho^2 + \psi_{,rho}\rho) + \\
 &\quad -\frac{1}{2}(-e^{-2\psi}) [-(\psi_{,t})^2 + (\psi_{,t}, \rho)^2 + \psi_{,tt} - \gamma_{tt} + \gamma_{,\rho\rho} + \\
 &\quad -\psi_{,\rho\rho} - \frac{\psi_{,\rho}}{\rho}(2e^{2(\psi-\gamma)})] = 0, \\
 &= -(\psi_{,t})^2 + (\psi_{,\rho})^2 - \gamma_{,tt} + \gamma_{,\rho\rho} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

De la misma manera se obtuvieron las ecuaciones de campo para las componenetas (33) y (01) respectivamente

$$\begin{aligned}
 G_{33} = R_{33} - \frac{1}{2}g_{33}R &= 0, \\
 (\psi_{,\rho})^2 - (\psi_{,t})^2 + 2\psi_{,tt} - 2\psi_{,\rho\rho} - \gamma_{,tt} + \gamma_{,\rho\rho} - \frac{2\psi_{,\rho}}{\rho} &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
 G_{01} = R_{01} - \frac{1}{2}g_{01}R &= 0, \\
 \frac{\gamma_{,t}}{\rho} &= 2\psi_{,t}\psi_{,\rho},
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

para obtener las ecuaciones de campo definitivas, antes analicemos las ecuaciones 3.33 y 3.34, obsérvese que dentro de la ecuación 3.34 está incluida la ecuación 3.33, reorganizando se tiene

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(\psi_{,\rho})^2 - (\psi_{,t})^2 - \gamma_{,tt} + \gamma_{,\rho\rho}}_0 + 2\psi_{,tt} - 2\psi_{,\rho\rho} - \frac{2\psi_{,\rho}}{\rho} &= 0, \\
 \psi_{,\rho\rho} - \psi_{,tt} + \frac{\psi_{,\rho}}{\rho} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Se obtiene entonces finalmente las ecuaciones de campo que modelan las ondas gravitacionales tipo Einstein-Rosen, un sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales independientes. Por medio del método que proporciona la Relatividad General con las ecuaciones

de campo de Einstein.

$$\boxed{\psi_{,\rho\rho} - \psi_{,tt} + \frac{\psi_{,\rho}}{\rho} = 0} \quad (3.37)$$

$$\boxed{\gamma_{,\rho} = \rho [(\psi_{,\rho})^2 + (\psi_{,t})^2]} \quad (3.38)$$

$$\boxed{\gamma_{,t} = 2\rho\psi_{,t}\psi_{,\rho}} \quad (3.39)$$

3.3. Deducción de la ecuaciones de campo por medio de Teoría de Campos

De igual manera que se utiliza en Relatividad General algunos recursos de la Teoría Clásica de Campos, como lo es el principio de mínima acción para obtener las ecuaciones de campo de Einstein, en este documentos se hará uso de la misma herramienta para deducir la ecuación que gobierna el modelo matemático de ondas gravitacionales tipo Einstein-Rosen. Para realizar este proceso primero se debe hallar la densidad lagrangiana del sistema.

3.3.1. Densidad lagrangiana del sistema

Para calcular la densidad lagrangiana del sistema, se recurre a la ecuación 2.18, al determinante de la métrica hallado en 3.7 y el escalar de curvatura de Ricci 3.29, reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sqrt{-g}R, \\ &= \sqrt{-\rho^2 (e^{2(\gamma-\psi)})^2} \left[2e^{2(\psi-\gamma)} \left[(\psi_{,\rho})^2 - (\psi_{,t})^2 + \psi_{,tt} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \gamma_{,tt} + \gamma_{,\rho\rho} - \psi_{,\rho\rho} - \frac{\psi_{,\rho}}{\rho} \right] \right], \\ \mathcal{L} &= 2(-\rho(\psi_{,t})^2 + \rho(\psi_{,\rho})^2 + \rho\psi_{,tt} - \rho\gamma_{,tt} + \rho\gamma_{,\rho\rho} - \rho\psi_{,\rho\rho} - \psi_{,\rho}). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Si se observa la densidad lagrangiana, esta posee términos de doble derivada de los campos, en otras palabras, estos términos tienen forma de divergencia de los campos ψ y γ . De acuerdo con el teorema de Gauss, la integral de estas divergencias pueden ser transformadas en las integrales sobre una hipersuperficie que rodea el cuadvolumen comparada con la integral cerrada sobre contorno de la variedad. Cuando nosotros variemos la acción, la variación de estos términos desaparece, porque el principio de mínima acción dice que la variación de los campos en los límites de la región de integración es cero. Es decir cuando vayamos al límite de nuestra variedad, la métrica será localmente una métrica plana o minkowskiana y su variación será nula. Por esta razón podemos eliminar estos términos que no aportarán nada cuando hagamos variación de la acción y por tanto el lagrangiano del sistema será el siguiente

$$\mathcal{L} = 2(\rho(\psi_\rho)^2 - \rho(\psi_{,t})^2 - \psi_{,\rho}). \quad (3.41)$$

Haciendo variación de la acción, tenemos.

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \mathcal{L}(\psi, \psi_{,t}, \psi_{,\rho}) = 0, \\ &= \int d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\psi_{,\rho})} \right) \right] + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\psi_{,t})} \right) \right] \right\} \delta \psi, \\ &= \int d^4x \{ [0 - \partial_\rho (4\rho\psi_{,\rho} - 2)] + [0 - \partial_t (-4\rho\psi_{,t})] \} \delta \psi, \\ &= \int d^4x \{ -4(\psi_{,\rho} + \rho\psi_{,\rho\rho}) + 4\rho\psi_{,tt} \} \delta \psi = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Se ha obtenido las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo $\psi(t, \rho)$ y a su vez la ecuación de campo que modela matemáticamente las ondas gravitacionales con simetría cilíndrica.

$$\boxed{\psi_{,\rho\rho} - \psi_{,tt} + \frac{\psi_{,\rho}}{\rho} = 0}. \quad (3.43)$$

Esta última ecuación es la de las ondas cilíndricas en el espacio plano. dada una solución ψ que satisface las condiciones de contorno adecuadas, la función γ está completamente definida por la combinación de las ecuaciones [3.38](#) y [3.39](#).

Capítulo 4

Aplicaciones ondas gravitacionales Einstein-Rosen

4.1. Aplicación: Solución para una onda monocromática

En este capítulo nos centraremos en encontrar la solución a la ecuación 3.43, es decir que hallaremos el campo $\psi(t, \rho)$ que satisfaga la ecuación de campo para las ondas gravitacionales ER. Una solución a esta ecuación corresponde a una onda gravitacional monocromática y la cual viaja asintóticamente hacía fuera. Antes de entrar a hallar la solución, primero validaremos que los campos satisfacen la condición de integrabilidad.

4.1.1. Condición de integrabilidad

Consideremos una función en coordenadas polares cilíndricas γ que depende únicamente de (t, ρ) . Derivando totalmente la función, si esta cumple con que es un diferencial exacto, se tiene entonces

$$d\gamma = u(t, \rho)dt + v(t, \rho)d\rho, \quad (4.1)$$

condición necesaria para la existencia de $\gamma(t, \rho)$, en general,

$$d\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial t}dt + \frac{\partial \gamma}{\partial \rho}d\rho. \quad (4.2)$$

Por comparación 4.1, 4.2 y teniendo en cuenta que los diferenciales dt y $d\rho$ son independientes entre ellos, se encuentra el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= u(t, \rho), \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} &= v(t, \rho), \end{aligned} \quad (4.3)$$

en ese orden, el sistema 4.3 debe tener una solución para γ , es decir, esta función es integrable. Estas dos ecuaciones deben ser compatibles entre sí. La condición de compatibilidad o de integrabilidad debe ser la siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} &= \frac{\partial v}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Si la condición 4.4 no se satisface, entonces el sistema 4.3 no tiene solución para γ y no es un diferencial exacto.

Ahora validemos la condición de integrabilidad para las funciones que se precisan encontrar a partir de las ecuaciones de campo 3.37, 3.38 y 3.39.

Sea dado nuestro sistema,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma}{\partial t} &= 2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,t} = u, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} &= \rho(\psi_{,\rho}^2 + \psi_{,t}^2) = v.\end{aligned}\tag{4.5}$$

la condición de integrabilidad,

$$\begin{aligned}u_{,\rho} &= v_{,t}, \\ u_{,\rho} - v_{,t} &= 0, \\ 2\psi_{,\rho}\psi_{,t} + 2\rho\psi_{,\rho\rho}\psi_{,t} + 2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,t\rho} - 2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,t\rho} + 2\rho\psi_{,t}\psi_{,tt} &= 0, \\ \rho\psi_{,t} \underbrace{\left(\psi_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\psi_{,\rho} - \psi_{,tt}\right)}_0 &= 0.\end{aligned}\tag{4.6}$$

4.1.2. Deducción de la función ψ

Con el proceso anterior se verifica que nuestro sistema es integrable y por lo tanto se puede proceder a encontrar las soluciones de las ecuaciones de campo ER.

Si se observa la ecuación 3.43 se puede empezar su solución realizando una separación de variables, la cual plantearemos de la siguiente manera,

$$\psi(t, \rho) = R(\rho)T(t).\tag{4.7}$$

Reemplazando las respectivas derivadas en la ecuación 3.43 se tiene,

$$\begin{aligned}\psi_{,\rho\rho} + \frac{\psi_{,\rho}}{\rho} - \psi_{,tt} &= 0, \\ TR_{,\rho\rho} + T \frac{R_{,\rho}}{\rho} - RT_{,tt} &= 0, \quad (\div RT) \\ \frac{1}{R} R_{,\rho\rho} + \frac{1}{R} \frac{R_{,\rho}}{\rho} - \frac{1}{T} T_{,tt} &= 0.\end{aligned}$$

Proponiendo la constante de separación como $-\omega^2$, se obtiene para T la ecuación de un movimiento armónico simple siguiente,

$$T_{,tt} + \omega^2 T = 0, \quad (4.8)$$

cuya solución es,

$$T(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t. \quad (4.9)$$

La ecuación diferencial para R quedaría entonces de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}R_{,\rho\rho} + \frac{R_{,\rho}}{\rho} + \omega^2 R &= 0, \quad (\times \rho^2) \\ \rho^2 R_{,\rho\rho} + \rho R_{,\rho} + \omega^2 \rho^2 R &= 0,\end{aligned}$$

proponiendo el cambio de variable $x = \omega \rho$ se obtiene,

$$x^2 R(x)_{,xx} + x R(x)_{,x} + x^2 R(x) = 0 \quad (4.10)$$

llegamos a una expresión conocida, llegamos a una ecuación diferencial de Bessel [20], la cual es de la siguiente forma

$$x^2 Z''_\nu(x) + x Z'_\nu(x) + (x^2 - \nu^2) Z_\nu(x) = 0, \quad (4.11)$$

donde $(\nu = 0, 1, 2, 3, \dots)$ y donde la solución a la ecuación anterior son las funciones de Bessel, obsérvese que en la ecuación 4.10, $\nu = 0$. La solución a esta ecuación es una combinación lineal entre las funciones de Bessel de primer orden $J_\nu(x)$ y las funciones de Neumann o funciones de Bessel de segundo orden $N_\nu(x)$ [20]. La solución a 4.10 es la que sigue

$$R(x) = A_2 J_0(x) + B_2 N_0(x), \quad (4.12)$$

donde

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta, \quad (4.13)$$

$$N_\nu(x) = \frac{\cos \nu \pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu \pi}. \quad (4.14)$$

Devolviendo el cambio de variable se llega a

$$R(\omega \rho) = A_2 J_0(\omega \rho) + B_2 N_0(\omega \rho), \quad (4.15)$$

por lo tanto la solución a la ecuación 3.43 es:

$$\boxed{\psi(t, \rho) = A J_0(\omega \rho) \cos \omega t + B N_0(\omega \rho) \sin \omega t} \quad (4.16)$$

La solución 4.16 en un primer acercamiento es una expresión físicamente importante, porque originalmente se planteó que estas ondas tienen la capacidad de transmitir energía a distancias ilimitadas [3], porque se puede escribir una solución que representa ondas progresivas, donde la expresión anterior es el primer factor de dilatación.

En la figura 4.1 se puede apreciar la gráfica del campo 4.16 en tres condiciones diferentes de ω .

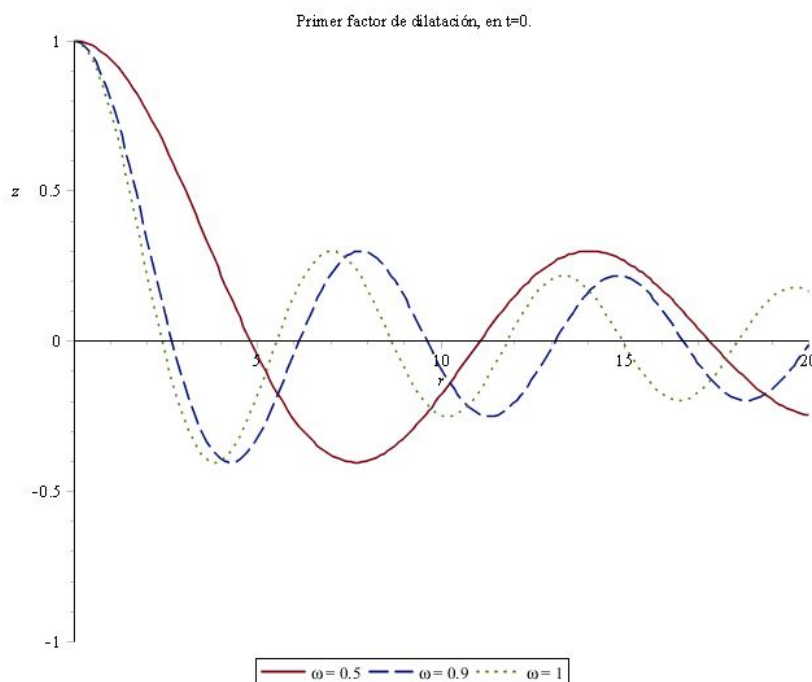


FIGURA 4.1: Campo ψ para un instante $t = 0$, con $A = 1$

Veamos ψ en otras tres condiciones de ω diferentes a la anterior.

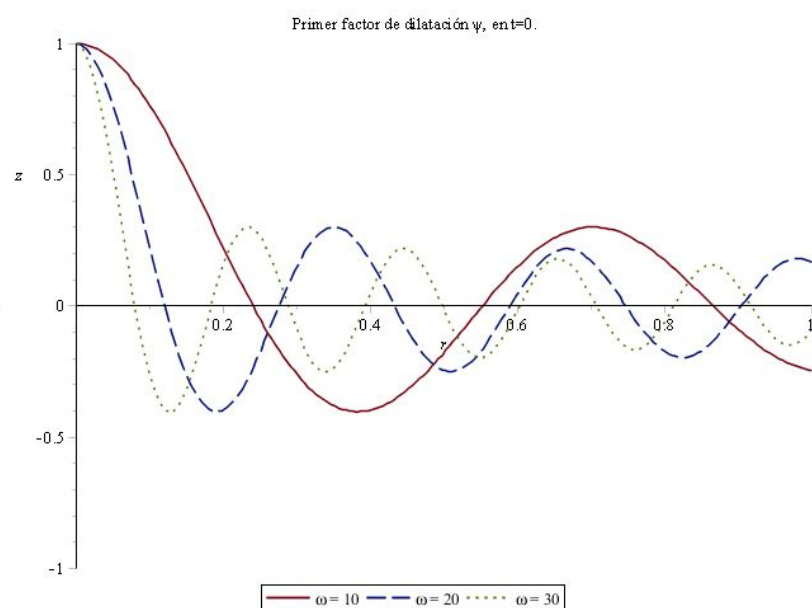


FIGURA 4.2: Campo ψ para un instante $t = 0$, con $A = 1$

En la figura 4.3 se observa de nuevo el campo ψ , pero esta vez en un instante posterior, en $t = 1$.

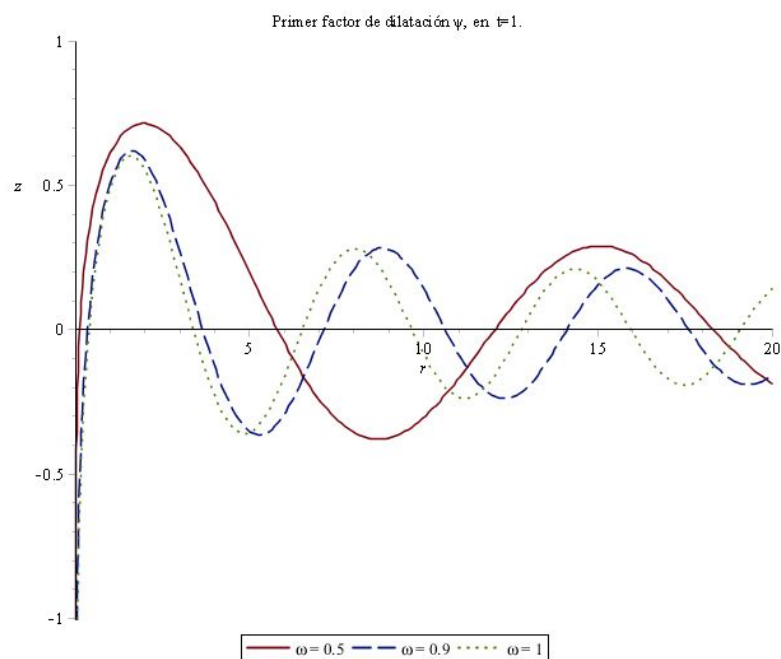


FIGURA 4.3: Campo ψ para un instante $t = 1$, con $A=1$

Por último tenemos las curvas de nivel de la función $\psi(t, \rho)$ en la figura 4.4 y la gráfica de dicho campo considerando el tiempo (t) como una variable no fija en la figura 4.5.

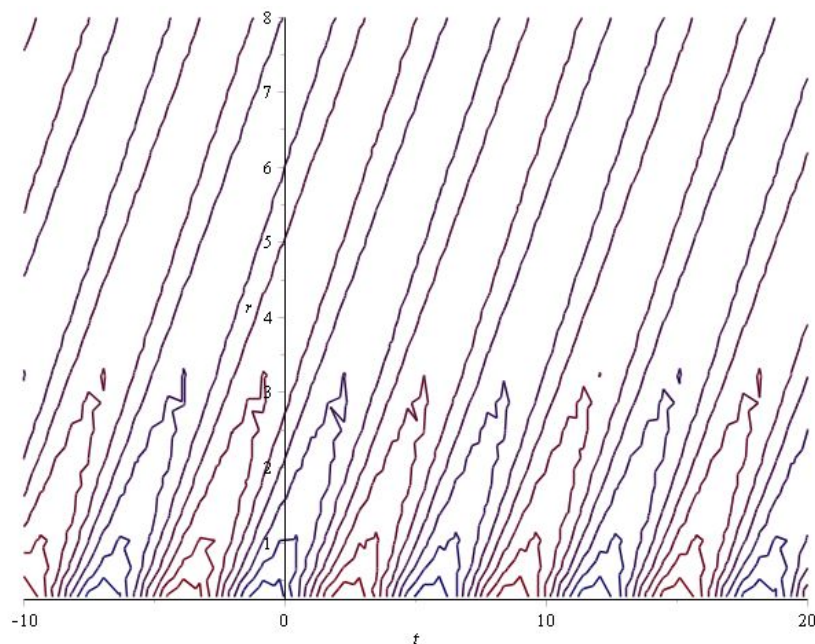


FIGURA 4.4: Curvas de nivel del campo ψ , con $A=1$

En la figura anterior se puede observar claramente el comportamiento oscilatorio del campo ψ , ahora dándole volumen a estas curvas de nivel evidenciamos más claramente el comportamiento del campo en la figura 4.5.

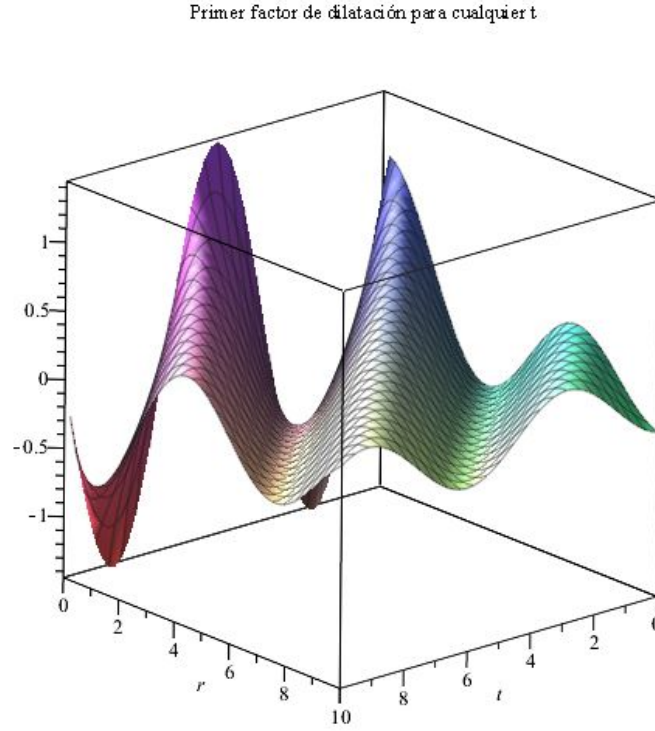


FIGURA 4.5: Gráfico del campo ψ en cualquier instante de tiempo t , con $A=1$

4.1.3. Deducción de la función γ

Ya con la función ψ encontrada, se procede a determinar la otra función γ para nuestro modelo (el segundo factor de dilatación), en el caso especial $A = B$ de 4.16, ya que se validó la condición de integrabilidad, podemos encontrar esta a partir de las ecuaciones de campo 3.38 y 3.39.

Nuestro sistema a solucionar,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= 2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,t} = u(t, \rho), \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} &= \rho(\psi_{,\rho}^2 + \psi_{,t}^2) = v(t, \rho), \end{aligned} \tag{4.17}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
 u(t, \rho) &= 2\rho[(-A\omega J_0(\omega\rho) \operatorname{sen} \omega t + A\omega N_0(\omega\rho) \cos \omega t)(AJ'_0(\omega\rho) \cos \omega t + \\
 &\quad AN'_0(\omega\rho) \operatorname{sen} \omega t)], \\
 v(t, \rho) &= \rho[(-A\omega J_0(\omega\rho) \operatorname{sen} \omega t + A\omega N_0(\omega\rho) \cos \omega t)^2 + \\
 &\quad (AJ'_0(\omega\rho) \cos \omega t + AN'_0(\omega\rho) \operatorname{sen} \omega t)^2].
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

Nuestra función estará determinada por la siguiente expresión,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= u(t, \rho), \\
 \gamma &= \int u(t, \rho) dt + h(\rho), \\
 \gamma &= U(t, \rho) + h(\rho),
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

ahora, $U(t, \rho)$ sería,

$$\begin{aligned}
 U(t, \rho) &= \int u(t, \rho) dt, \\
 &= -A^2\rho[(N_0N'_0 - J_0J'_0) \cos^2 \omega t] - \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t (J_0N'_0 + N_0J'_0) + \\
 &\quad + \omega t (J_0N'_0 - N_0J'_0),
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

entonces,

$$\gamma = A^2\rho[(N_0N'_0 - J_0J'_0) \cos^2 \omega t] - \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t (J_0N'_0 + N_0J'_0) + \omega t (J_0N'_0 - N_0J'_0) + h(\rho).
 \tag{4.21}$$

De la otra ecuación de campo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} &= \frac{\partial U(t, \rho)}{\partial \rho} + \frac{dh(\rho)}{d\rho} = v(t, \rho), \\
\frac{dh(\rho)}{d\rho} &= v(t, \rho) - \frac{\partial U(t, \rho)}{\partial \rho}, \\
&= A^2 \left[-\rho(\omega t N_0 + J_0 \cos^2(\omega t) + N_0 \cos(\omega t) \sin(\omega t) J_0'' + \rho(\omega t J_0 + \right. \\
&\quad \left. - J_0 \cos(\omega t) \sin(\omega t) + N_0 \cos^2(\omega t)) N_0'' + [(N_0 N_0' - J_0 J_0') + \right. \\
&\quad \left. - \rho \omega^2 (J_0 - N_0)(J_0 + N_0)] \cos^2(\omega t) + \right. \\
&\quad \left. - \cos(\omega t) \sin(\omega t) \left[J_0 N_0' + 2 \left(\rho \omega^2 J_0 + \frac{J_0'}{2} \right) N_0 \right] + \right. \\
&\quad \left. + (\rho(N_0')^2 + J_0 N_0' \omega t + \omega(\rho \omega (J_0)^2 - t N_0 J_0')) \right], \tag{4.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dh(\rho)}{d\rho} &= A^2 \left[-J_0 \overbrace{(\rho \omega^2 J_0 + \rho J_0'' + J_0')}^1 + N_0 \overbrace{(\rho N_0'' + N_0' + \rho \omega^2 N_0)}^2 \right] + \\
&\quad + A^2 \left[-\rho \sin(\omega t) N_0 J_0'' - \rho J_0 \sin(\omega t) N_0'' + \right. \\
&\quad \left. - \sin(\omega t) \left(J_0 N_0' + 2 \left(\rho \omega^2 J_0 + \frac{J_0'}{2} \right) N_0 \right) \right] \cos(\omega t) + \\
&\quad + A^2 \left[-J_0'' N_0 \rho \omega t + N_0'' J_0 \rho \omega t + \rho(N_0')^2 + J_0 N_0' \omega t + \right. \\
&\quad \left. + \omega(\rho \omega (J_0)^2 - t N_0 J_0') \right], \tag{4.23}
\end{aligned}$$

si se observa bien, los factores 1 y 2 son ecuaciones de Bessel y por lo tanto estos desaparecen. Simplificando los otros términos se tiene,

$$\begin{aligned}
\frac{dh(\rho)}{d\rho} &= A^2 \left[-\sin(\omega t) \cos(\omega t) \left(\overbrace{(2\rho \omega^2 N_0 + N_0' + \rho N_0'')}^1 J_0 + \rho N_0 J_0'' + N_0 J_0' \right) \right] + \\
&\quad + A^2 \left[\underbrace{-N_0 \omega t (\rho J_0'' + J_0')}^2 + \underbrace{J_0 \omega t (\rho N_0'' + N_0')}^3 + \rho(N_0')^2 + \omega^2 \rho J_0^2 \right], \tag{4.24}
\end{aligned}$$

separando el término 1, para 2 y 3 sumando y restando $\rho\omega^2 N_0 J_0$,

$$\begin{aligned} \frac{dh(\rho)}{d\rho} = & A^2 \left[-\sin(\omega t) \cos(\omega t) \left(\cancel{(\rho N_0'' + N_0' + \rho\omega^2 N_0) J_0} + \cancel{(\rho J_0'' + J_0' + \rho\omega^2 J_0) N_0'} \right) \right] + \\ & + A^2 \left[\cancel{-N_0 \omega t (\rho J_0'' + J_0' + \rho\omega^2 J_0)} + \cancel{J_0 \omega t (\rho N_0'' + N_0' + \rho\omega^2 N_0)} + \rho(N_0')^2 + \omega^2 \rho J_0^2 \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

Por lo tanto, la función $h(\rho)$ queda de la siguiente forma. Para este cálculo se utilizaron las propiedades de las funciones de Bessel de primer y segundo orden [20] se obtiene,

$$\begin{aligned} h(\rho) &= \int A^2 \rho (N_0')^2 d\rho + \int A^2 \omega^2 \rho J_0^2 d\rho, \\ &= \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \rho^2 \left[((N_1(\omega\rho))^2 - N_0(\omega\rho) N_2(\omega\rho)) + ((J_0(\omega\rho))^2 + (J_1(\omega\rho))^2) \right], \end{aligned} \quad (4.26)$$

utilizando las siguientes propiedades,

$$\begin{aligned} N_1 &= -N_0', \\ N_2 &= -N_0 - \frac{2}{\omega\rho} N_0', \\ J_1 &= -J_0', \\ J_2 &= -J_0 - \frac{2}{\omega\rho} J_0' \end{aligned} \quad (4.27)$$

Se deja todo en términos de J_0 y N_0 , se reemplaza $h(\rho)$ en 4.21, se aplica propiedades trigonométricas y se obtiene el campo γ , así,

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{1}{2} A^2 \rho \left\{ (N_0 N_0' - J_0 J_0') + (N_0 N_0' - J_0 J_0') \cos(2\omega t) - (J_0 N_0' + N_0 J_0') \sin(2\omega t) + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{2\omega t (J_0 N_0' - N_0 J_0')}_1 \right\} + \frac{1}{2} A^2 \rho \left\{ \omega\rho [J_0^2 + (J_0')^2 + N_0^2 + (N_0')^2] + 2\omega N_0' N_0 \right\}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

utilizando en (1) la siguiente propiedad de las funciones de Bessel [20],

$$J_0 N'_0 - J'_0 N_0 = \frac{2}{\pi(\omega\rho)}, \quad (4.29)$$

se obtiene la función γ

$$\begin{aligned} \gamma(t, \rho) = & \frac{1}{2} A^2 \rho \left\{ J_0(\omega\rho) J'_0(\omega\rho) - N_0(\omega\rho) N'_0(\omega\rho) + \right. \\ & + \omega^2 \rho [(J_0(\omega\rho))^2 + (J'_0(\omega\rho))^2 + (N_0(\omega\rho))^2 + (N'_0(\omega\rho))^2] + \\ & + [J_0(\omega\rho) J'_0(\omega\rho) - N_0(\omega\rho) N'_0(\omega\rho)] \cos(2\omega t) + 2\omega N'_0(\omega\rho) N_0(\omega\rho) + \\ & \left. + [J_0(\omega\rho) N'_0(\omega\rho) + N_0(\omega\rho) J'_0(\omega\rho)] \sin(2\omega t) \right\} - \frac{2}{\pi} A^2 t. \end{aligned} \quad (4.30)$$

La ecuación 4.33 fue escrita de tal forma que se pueda comparar fácilmente con los resultados presentes en la literatura [3]. Para efectos de la validación de los cálculos anteriores y de la veracidad de la respuesta se utilizará la ecuación 4.28 y por medio de la ecuación de campo 3.38, para determinar si satisface dicha expresión y asegurar que nuestro modelo es correcto.

4.1.4. Verificación de γ

Partiendo de la ecuación 4.28 y derivando con respecto al tiempo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} A^2 \rho \left\{ J_0(\omega \rho) J'_0(\omega \rho) - N_0(\omega \rho) N'_0(\omega \rho) + \right. \right. \\
&\quad + \omega^2 \rho [(J_0(\omega \rho))^2 + (J'_0(\omega \rho))^2 + (N_0(\omega \rho))^2 + (N'_0(\omega \rho))^2] + \\
&\quad + [J_0(\omega \rho) J'_0(\omega \rho) - N_0(\omega \rho) N'_0(\omega \rho)] \cos(2\omega t) + 2\omega N'_0(\omega \rho) N_0(\omega \rho) + \\
&\quad \left. \left. + [J_0(\omega \rho) N'_0(\omega \rho) + N_0(\omega \rho) J'_0(\omega \rho)] \sin(2\omega t) - 2\omega t (J_0 N'_0 - N_0 J'_0) \right\} \right), \\
&= A^2 \rho \omega \left\{ \sin(2\omega t) [N_0(\omega \rho) N'_0(\omega \rho) - J_0(\omega \rho) J'_0(\omega \rho)] + \right. \\
&\quad + \cos(2\omega t) [J_0(\omega \rho) N'_0(\omega \rho) + N_0(\omega \rho) J'_0(\omega \rho)] + \\
&\quad \left. + N_0(\omega \rho) J'_0(\omega \rho) - J_0(\omega \rho) N'_0(\omega \rho) \right\}, \\
&= 2A^2 \rho \omega \left\{ [N_0 N'_0 - J_0 J'_0] \sin \omega t \cos \omega t + [N'_0 J_0 + N_0 J'_0] \cos^2 \omega t - J_0 N'_0 \right\},
\end{aligned} \tag{4.31}$$

comparando el resultado anterior con el desarrollo 4.18,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma}{\partial t} &= 2\rho \psi_{,\rho} \psi_{,t} = \rho [(-A\omega J_0(\omega \rho) \sin \omega t + A\omega N_0(\omega \rho) \cos \omega t)(A J'_0(\omega \rho) \cos \omega t + \\
&\quad A N'_0(\omega \rho) \sin \omega t)], \\
&= 2A^2 \omega \rho [-J_0 J'_0 \sin(\omega t) \cos(\omega t) - J_0 N'_0 \sin^2(\omega t) + N_0 J'_0 \cos^2(\omega t) + \\
&\quad + N_0 N'_0 \cos(\omega t) \sin(\omega t)] \\
&= 2A^2 \rho \omega \left\{ [N_0 N'_0 - J_0 J'_0] \sin \omega t \cos \omega t + [N'_0 J_0 + N_0 J'_0] \cos^2 \omega t - J_0 N'_0 \right\}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Claramente se puede ver una igualdad entre ambos casos, lo que es de suma relevancia para este trabajo, ya que se valida nuestro campo γ , que es un hecho interesante, no sólo se comprueba la respuesta sino que se pone a prueba la validez del modelo, por medio de las ecuaciones de campo.

Ya con este proceso desarrollado, se procede a hacer un comparativo matemático con nuestra solución γ para una onda monocromática del artículo originar Weber-Wheeler (1957)[3], que es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\gamma(t, \rho) = & \frac{1}{2}A^2\rho\omega\{J_0(\omega\rho)J'_0(\omega\rho) + N_0(\omega\rho)N'_0(\omega\rho) + \\
& +\omega\rho[(J_0(\omega\rho))^2 + (J'_0(\omega\rho))^2 + (N_0(\omega\rho))^2 + (N'_0(\omega\rho))^2] + \\
& +[J_0(\omega\rho)J'_0(\omega\rho) - N_0(\omega\rho)N'_0(\omega\rho)]\cos(2\omega t) + \\
& +[J_0(\omega\rho)N'_0(\omega\rho) + N_0(\omega\rho)J'_0(\omega\rho)]\sin(2\omega t)\} - \frac{2}{\pi}A^2\omega t.
\end{aligned}
\tag{4.33}$$

Con claridad se observa una inconsistencia puramente matemática entre el campo γ encontrado en este trabajo, lo que le agrega cierta controversia a nuestros resultados, ya que la diferencia radica específicamente en la ausencia del factor ω en el primer, tercer y cuarto términos de la ecuación [4.33](#).

Como resultado de esta sección se muestran las siguientes gráficas para el campo $\gamma(t, \rho)$ o segundo factor de dilatación. Inicialmente se puede apreciar las curvas de nivel y luego la gráfica de dicho campo en cualquier instante de tiempo.

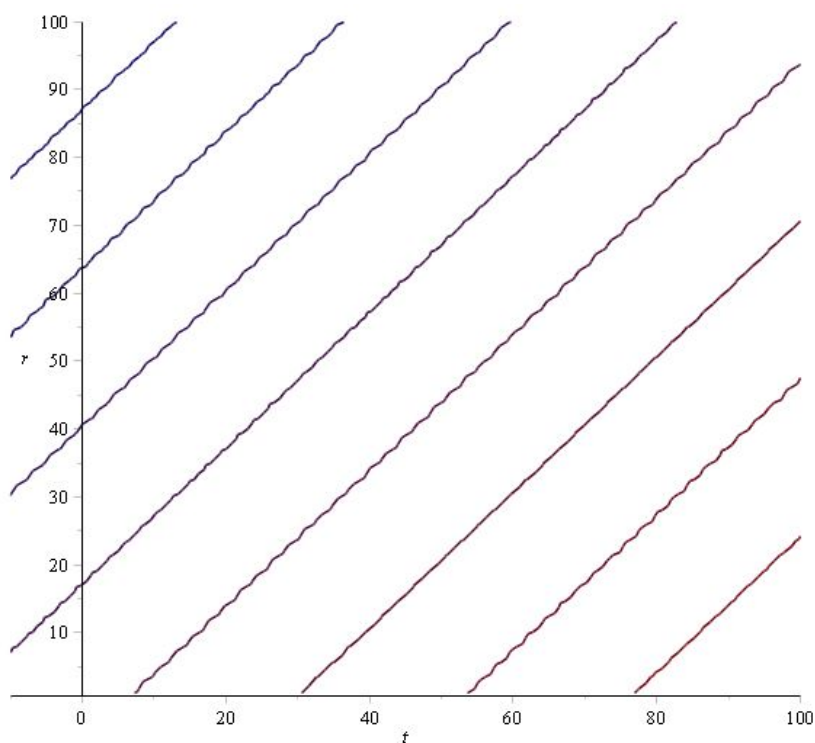


FIGURA 4.6: Curvas de nivel del campo γ para cualquier instante de tiempo t , con $A = 1$

Segundo factor de dilatación γ para cualquier t

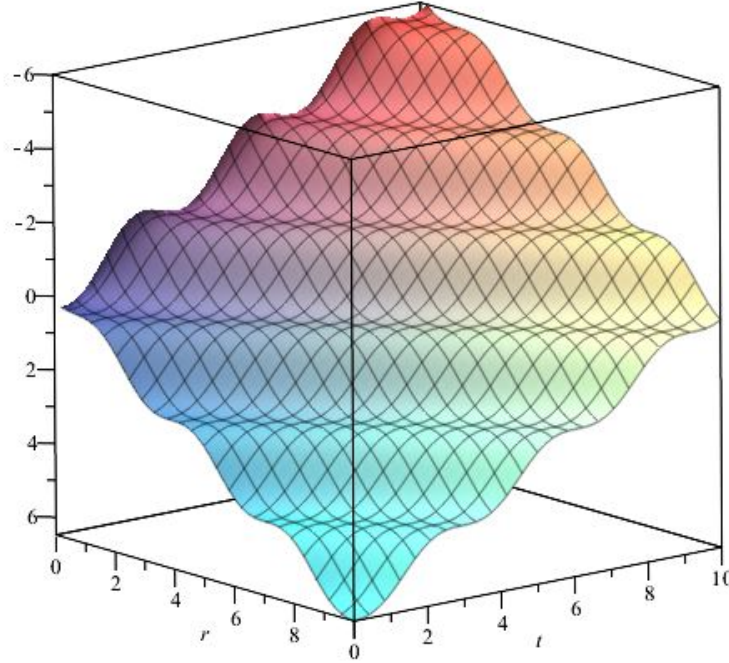


FIGURA 4.7: Gráfica del campo γ para cualquier instante de tiempo t , con $A=1$

4.2. Aplicación: Pulso formado por una superposición líneal de ondas

En esta parte se procederá a realizar una aplicación utilizando las ondas gravitacionales, pero en esta oportunidad se analizará un tren de pulsos formado por una superposición de tales ondas, considerando $B = 0$ y dichas ondas con un factor de amplitud $A = 2Ce^{\alpha\omega}$, entonces el primer factor de dilatación queda de la siguiente forma,

$$\psi = 2C \int_0^\infty e^{\alpha\omega} J_0(\omega\rho) \cos(\omega t) d\omega. \quad (4.34)$$

Si se observa bien la expresión anterior se puede decir que tenemos una especie de transformada de Fourier, ya que estamos considerando un pulso de ondas monocromáticas y se reduce el problema a analizar la totalidad de estas en su conjunto.

Para realizar esta aplicación, se hicieron los cálculos en el paquete Maple. Integrando y simplificando se tiene,

$$\psi = C \{ [(\alpha - it)^2 + \rho^2]^{-\frac{1}{2}} + [(\alpha + it)^2 + \rho^2]^{-\frac{1}{2}} \} \quad (4.35)$$

Donde α es una medida aproximada del ancho pulso.

Se determina el segundo factor de dilatación γ integrando de nuevo las ecuaciones de campo 3.38 y 3.39, de la misma manera que se encontró anteriormente y se llega a lo siguiente,

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{1}{2} C^2 \left\{ \frac{1}{\alpha^2} - \rho^2 [(\alpha - it)^2 + \rho^2]^{-2} - \rho^2 [(\alpha + it)^2 + \rho^2]^{-2} + \right. \\ \left. - \frac{1}{\alpha} (t^2 + \alpha^2 - \rho^2) [t^4 + 2t^2(\alpha^2 - \rho^2) + (\alpha^2 + \rho^2)]^{-\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Capítulo 5

Conclusiones

- Se logra determinar y validar matemáticamente la radiación gravitacional tipo Einstein-Rosen partiendo de la métrica de Weyl en coordenadas canónicas y por medio de dos formalismos, uno tensorial y otro enmarcado en la Teoría Clásica de Campos se deduce la ecuación de ondas con simetría cilíndrica. En otras palabras, se demuestra que las perturbaciones del espacio-tiempo de Einstein-Rosen son efectivamente ondas gravitacionales monocromáticas.
- Se obtienen los campos $\psi(t, \rho)$ y $\gamma(t, \rho)$ respectivamente, siendo el primero una función de onda gravitacional monocromática que satisface la ecuación de ondas y depende de las funciones de Bessel y Nuemann. En un primer acercamiento es una expresión físicamente importante, porque originalmente se planteó que estas ondas tienen la capacidad de transmitir energía a distancias ilimitadas [3], porque se puede escribir una solución que representa ondas progresivas. Contrario a esta interpretación está la hecha por Rosen partiendo de la base de que si la energía está siendo irradiada por un sistema cilíndrico cerca del origen, entonces la pérdida de energía haría imposible que la función ψ permaneciera en un tiempo periódico. La función ψ representando físicamente el primer factor de dilatación.

- El campo $\gamma(t, \rho)$ representa también una perturbación monocromática. La aparición de la función de Neumann ($N_0(\omega\rho)$) produce una singularidad en la función γ en $\nu = 0$, como se ve claramente en [4.14](#). Se resalta que no es posible unir la solución al espacio libre, es decir para una región cercana al origen donde se contiene a la masa.
- Se logra verificar los campos ψ y γ para un pulso de perturbaciones gravitacionales y la linealidad de la ecuación de campo [3.37](#) permite el tratamiento de este problema empleando la transformada de Fourier.

Bibliografía

- [1]. H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003.
- [2]. M. Carmeli and Ch. Charach. *The Einstein-Rosen Gravitational Waves and Cosmology*. Foundations of physics, 14(10), pp.963-986, 1984.
- [3]. J. Y. Weber, J. A. Wheeler. *Reality of the Cylindrical Gravitational Waves of Einstein and Rosen*. Reviews of Modern Physics, 29(3), pp.509-515, (1957).
- [4]. F. P. Miller, A. F. Vandome, and J. McBrewster. *Einstein-Hilbert Action: General Relativity, Action (physics), Einstein Field Equations, Equations of Motion, David Hilbert, Maxwell's Equations, Noether's Theorem*. Alphascript Publishing, 2010.
- [5]. S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley, 1972.
- [6]. H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, Third edition, 2000.
- [7]. W. B. Bonnor. *Non-singular fields in general relativity*. J. Math. Mech. 6 203, 1957.
- [8]. R. d'Inverno. *Introducing Einstein's General Relativity*. Oxford University Press, New York, 1992.
- [9]. A. Einstein. *Über Gravitationswellen*. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Berlín, 1918.

-
- [10]. A. Einstein, and N. Rosen. *On Gravitational Waves*. Journal of the Franklin Institute, Elsevier, 1937.
- [11]. M. Carmeli, and Ch. Charach. *The Einstein-Rosen Gravitational Waves and Cosmology*. Foundations of physics, 1984.
- [12]. K. Schwarzschild, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin , p. 189–424 (1916).
- [13]. A. E. Scheidegger. *Gravitational Motion*. Reviews of Modern Physics, 25(2), pp.451-468, 1953.
- [14]. L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press, 1987.
- [15]. R. C. Tolman. *Relativity thermodynamics and cosmology*. Oxford University, Press, London, p. 227, 1934.
- [16]. K. S. Virbhadra. *Energy and momentum of cylindrical gravitational waves-II*. Prana Journal of Physics, 45(2), pp. 215-219, 1995.
- [17]. B. Schutz. *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1980.
- [18]. S. Gudmundsson. *An Introduction to Riemann Geometry*. Lecture Notes in Mathematics, Lund University, 2018.
- [19]. D. Wands. *Extended Gravity Theories and the Einstein-Hilbert Action*. Classical and Quantum Gravity, 1994.
- [20]. G. B. Arfken, H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Academic Press, 2005.
- [21]. J. Weber, W. B. Bonnor. *Reality of the Cylindrical Gravitational Waves of Einstein and Rosen*. Reviews of Modern Physics, 29(3), pp.509-515, 1957.